数理解析研究所講究録
221巻 1974年 7-16

コホモロジー複素射影空間上の可微分$SU(n)$作用について

阪大理　内田伏一

§1. 或る isotropy 型をもった$SU(n)$作用

Eを可微$SU(n)$作用をもった多様体とする$(n \geqq 3)$．さらに，Eの各点の isotropy 群の単位元を含む連結成分が，$SU(n)$において

$$SU(n-1) \quad \text{または} \quad NSU(n-1)$$

と共役であると仮定する．ここに$NSU(n-1)$は$SU(n)$における$SU(n-1)$の正規化群である．このとき

$$S^1 = NSU(n-1)/SU(n-1)$$

は，$X = F(SU(n-1), E)$に自然に作用する．ただし，Xは$SU(n-1)$作用に関するEの不動点集合である．従って，$SU(n)$同変な写像

$$\Phi : SU(n)/SU(n-1) \times_{S^1} X \longrightarrow E, \quad [g \cdot SU(n-1), x] \longrightarrow g \cdot x$$

が定義できるが，

$$g \in SU(n),\ g^{-1}SU(n-1)g \subset NSU(n-1) \Rightarrow g \in NSU(n-1)$$

が成り立つこと，および可微分スライス定理によって，Φは微分同相写像である．

この事実を使えば，次の補題を証明できる．

$\boxed{\text{補題 } 1\text{-}1}$　Vを実$SU(n)$ベクトル空間とする$(n \geqq 3)$．もし，Vの非零ベクトルのisotropy群の単位元を含む連結成分が，常に$SU(n-1)$または$NSU(n-1)$と共役であれば，Vは$SU(n)$の標準的な作用をもったR^{2n}と実$SU(n)$ベクトル空間として同値である．

次に，Mを可微分$SU(n)$作用をもった多様体とする$(n \geqq 3)$．さらに，Mの各点のisotropy群の単位元を含む連結成分が，$SU(n)$において

$$SU(n-1),\ NSU(n-1),\ SU(n)$$

のいずれかと共役であると仮定する．不動点集合

$$F = F(SU(n), M)$$

が空集合であれば，先の考察によって，$SU(n)$多様体として

$$M = SU(n)/SU(n-1) \underset{S^1}{\times} F(SU(n-1), M) \tag{1.2}$$

である．いま，$F \neq \phi$であるとし，MにおけるFの$SU(n)$不変な閉管状近傍をUとする．このとき$SU(n)$多様体としての分割

$$M = U \cup (SU(n)/SU(n-1) \times_{S^1} X)$$

が在る．ただし，$X = F(SU(n-1), M - \mathrm{int}\, U)$ である．さて
$SU(n)$ 多様体として

$$\partial U = SU(n)/SU(n-1) \times_{S^1} \partial X$$

であり，補題 1-1 によって，∂U の各点の isotropy 群は $SU(n-1)$ と共役であるから，∂X 上の S^1 作用は free である．再び，補題 1-1 を使って，球体束 $U \longrightarrow F$ は，球体束

$$D^{2n} \times_{S^1} \partial X \longrightarrow \partial X / S^1$$

と，$SU(n)$ 作用をもった球体束として同値であることが分かる．従って，$SU(n)$ 多様体として

$$(1.3) \qquad M = \partial(D^{2n} \times X)/S^1 = D^{2n} \times_{S^1} \partial X \cup S^{2n-1} \times_{S^1} X$$

である．

§2. $HP_{n+k}(\mathbb{C})$ 上の $SU(n)$ 作用．

$2k$ 次元の可微分連結閉多様体 M について，コホモロジー環の同型

$$H^*(M; Q) = H^*(P_k(\mathbb{C}); Q)$$

が成り立つとき，$M = HP_k(\mathbb{C})$ と書くことにし，M を Q 上のコホモロジー複素射影空間という．

$\boxed{\text{定理 2-1}}$ $n \geqq 7$, $0 \leqq k < n-4$ とする. $HP_{n+k}(\mathbb{C})$ 上の任意の自明でない可微分 $SU(n)$ 作用に対して, 不動点集合は, 或る $HP_k(\mathbb{C})$ であり, $SU(n)$ 多様体として

$$HP_{n+k}(\mathbb{C}) = \partial(D^{2n} \times X)/S^1$$

と表わすことができる. ここに, X は $2k+2$ 次元のコンパクトで向きづけ可能な可微分 S^1 多様体で, ∂X 上の S^1-作用は free であり, $\tilde{H}^*(X;\mathbb{Q}) = 0$ が成り立つ.

証明. $n \geqq 7$ のとき, $SU(n)$ の連結閉部分群 G について,

$$n^2 - 4n + 7 < \dim G < \dim SU(n) = n^2 - 1$$

であれば, G は $SU(n)$ において $SU(n-1)$ または $NSU(n-1)$ と共役であることが分かる. 従って, $0 \leqq k < n-4$ のとき, $2n+2k$ 次元多様体上の任意の $SU(n)$ 作用に対して, 各点の isotropy 群の単位元の連結成分は,

$$SU(n-1),\ NSU(n-1),\ SU(n)$$

のいずれかと共役になる. 故に §1 の結果を適用することができる.

まず, $M = HP_{n+k}(\mathbb{C})$ 上の任意の可微分 $SU(n)$ 作用に対して, 不動点があること, 即ち

$$F = F(SU(n), M) \neq \phi$$

であることを示そう. もし, $F = \phi$ であれば (1.2) によっ

て，可微分ファイバー束

$$F(SU(n-1), M) \longrightarrow M \longrightarrow P_{n-1}(\mathbb{C})$$

が存在する．従って

$$\chi(M) = \chi(P_{n-1}(\mathbb{C})) \cdot \chi(F(SU(n-1), M))$$

が成り立つことになり，

$$k+1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ n).$$

これは，仮定 $0 \leq k < n-4$ によって不可能である．故に $F \neq \phi$ となり，(1.3) によって，$SU(n)$ 多様体として

$$M = \partial(D^{2n} \times X)/S^1 = D^{2n} \times_{S^1} \partial X \cup S^{2n-1} \times_{S^1} X$$

と表わすことができる．ここに，X は $2k+2$ 次元の連結かつコンパクトで向きづけ可能な可微分 S^1 多様体であって，∂X 上の S^1 作用は *free* である．次に $\tilde{H}^*(X;Q) = 0$ を示そう．

$$H^i(M, S^{2n-1} \times_{S^1} X; Q) \cong H^{i-2n}(\partial X/S^1; Q), \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

が成り立つので，

$$H^i(M;Q) \cong H^i(S^{2n-1} \times_{S^1} X; Q), \quad i \leq 2n-2$$

が成り立つ．この事実と，$k < n-4$ を使って

$$H^*(\partial(D^{2n} \times X); Q) \cong H^*(S^{2n+2k+1}; Q)$$

が証明できる．故に，*Poincaré-Lefschetz duality* を用いて

$$\tilde{H}^*(X;Q) = 0$$

が示され，さらに，$H^*(\partial X;Q) \cong H^*(S^{2k+1};Q)$ が成り立つ．

従って，$\partial X/S^1 = HP_k(\mathbb{C})$ が成り立つ．（終）

§3. $HP_{n+k}(\mathbb{C})$ 上の $SU(n)$ 作用の構成

定理2-1の分解

$$HP_{n+k}(\mathbb{C}) = \partial(D^{2n} \times X)/S^1$$

の存在を使って，S^1 多様体 X を構成することによって，ある $HP_{n+k}(\mathbb{C})$ 上の $SU(n)$ 作用を具体的に構成してみよう．

まず，次の補題を準備する（証明省略）

$\boxed{\text{補題 3-1}}$ X をコンパクトで向きづけ可能な $2k+2$ 次元の可微分 S^1 多様体とする．∂X 上の S^1 作用が free であり，

$$\tilde{H}^*(X;A) = 0, \quad A = \mathbb{Z}\ (\text{又は}\ \mathbb{Q})$$

が成り立つとする．$n \geqq 2$ であれば，

$$M = \partial(D^{2n} \times X)/S^1$$

について，

(a) $\qquad H^*(M;A) \cong H^*(P_{n+k}(\mathbb{C});A)$，

(b) $\qquad \pi_1(M) \cong \pi_1(X)$，

が成り立ち，さらに $n+k \geqq 3$ であって，X が可縮であると仮定すれば，M は $P_{n+k}(\mathbb{C})$ と微分同相になる．

$\boxed{\text{定理 3-2}}$　$n \geqq 2$ とする．

(a)　$k \geqq 1$，$p \geqq 1$ に対して，可微分 $SU(n)$ 作用をもった多様体 $M = HP_{n+k}(\mathbb{C})$ で，

$$\pi_1(M) \cong Z_p \ , \ F(SU(n), M) \cong P_k(\mathbb{C})$$

を満たすものが存在する．

次に，G を有限表示可能な群で，$H_1(G;\mathbb{Z}) = H_2(G;\mathbb{Z}) = 0$ とすれば，

(b)　$k \geqq 3$ のとき，可微分 $SU(n)$ 作用をもった多様体 $M = HP_{n+k}(\mathbb{C})$ で，

$$\pi_1(M) \cong G \ , \ H^*(M;\mathbb{Z}) \cong H^*(P_{n+k}(\mathbb{C});\mathbb{Z}),$$
$$F(SU(n), M) = P_k(\mathbb{C})$$

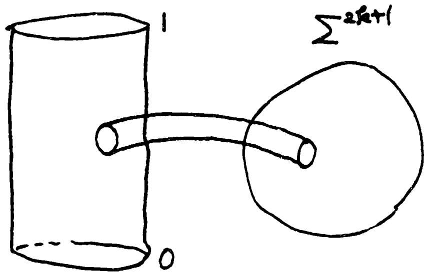
を満たすものが存在する．

(c)　$k \geqq 3$ のとき，$P_{n+k}(\mathbb{C})$ 上の可微分 $SU(n)$ 作用で

$$\pi_1(F) \cong G \ , \ H^*(F;\mathbb{Z}) \cong H^*(P_k(\mathbb{C});\mathbb{Z})$$

を満たすものが存在する．ただし，$F = F(SU(n), P_{n+k}(\mathbb{C}))$．

証明．補題 3-1 によって，ある種の S^1 多様体 X を構成すれば十分である．



(i)　$k \geqq 1$ とする．

$W = P_k(\mathbb{C}) \times [0,1] \# \Sigma^{2k+1}$ とおく．

ただし，

$$H^*(\Sigma^{2k+1};A)\cong H^*(S^{2k+1};A),\ A=\mathbb{Z}\ (又は\ \mathbb{Q})$$

このとき，$\partial W = P_k(\mathbb{C})\times 0 \cup P_k(\mathbb{C})\times 1$ であって，

(イ) $\pi_1(W)\cong\pi_1(\Sigma^{2k+1})$，

(ロ) $H^*(W;A)\cong H^*(P_k(\mathbb{C});A)$

が成り立ち，さらに可微分主 S^1 束 $\pi: E\longrightarrow W$ で，

$$\begin{array}{l}\partial_i E \longrightarrow P_k(\mathbb{C})\times i \quad (i=0,1)\\ \ \ \| \\ \pi^{-1}(P_k(\mathbb{C})\times i)\end{array}$$

が，Hopf 束 $S^{2k+1}\longrightarrow P_k(\mathbb{C})$ と同値になるものが存在し，

(ハ) $\pi_1(E)\cong\pi_1(W)$，

(ニ) $H^*(E,\partial_1 E;A)=0$

が成り立つ．そこで

$$X = E\underset{\partial_1 E}{\cup} D^{2k+2}$$

とすれば，X はコンパクト連結向きづけ可能な $2k+2$ 次元可微分多様体で，準自由可微分 S^1 作用をもち，$\partial X = S^{2k+1}$ 上の S^1 作用は linear かつ free である．さらに

(ホ) $\pi_1(X)\cong\pi_1(\Sigma^{2k+1})$，

(ヘ) $\tilde{H}^*(X;A)=0$

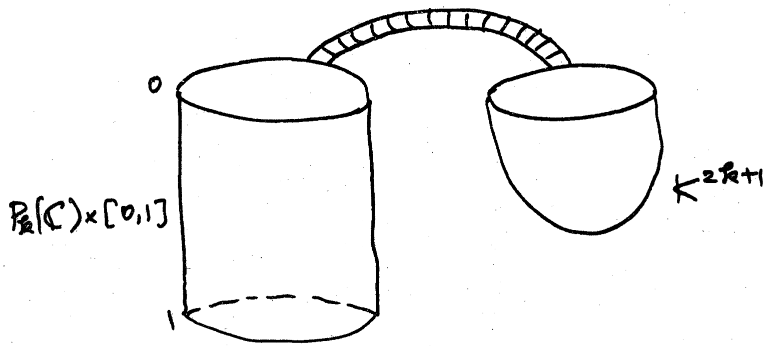
が成り立つ．この X に対して，補題 3-1 を適用することによって (a)，(b) の例を構成できる．すなわち，(a) の例は，$\Sigma^{2k+1}=S^{2k+1}/\mathbb{Z}_p$ を使えば良く，(b) の例については，後

記の注3-3を参照せよ．

(ii) 次に (c) の例を構成しよう．K^{2k+1} をコンパクトで可縮な可微分多様体とし，

$$W = P_k(\mathbb{C}) \times [0,1] \# K^{2k+1} \quad (\textit{boundary connected sum})$$

とする．



ここに，

$$\partial W = P_k(\mathbb{C}) \# \partial K \cup P_k(\mathbb{C}) \times 1$$

であり，$P_k(\mathbb{C}) \times 1$ は W の *deformation retract* である．

故に，可微分主 S^1 束 $\pi : E \longrightarrow W$ で

$$\begin{array}{ccc} \partial_1 E & \longrightarrow & P_k(\mathbb{C}) \times 1 \\ \parallel & & \\ \pi^{-1}(P_k(\mathbb{C}) \times 1) & & \end{array}$$

が，Hopf 束 $S^{2k+1} \longrightarrow P_k(\mathbb{C})$ と同値になるものが存在する．

このとき，

$$X = E \underset{\partial_1 E}{\cup} D^{2k+2}$$

は，コンパクト可縮な $2k+2$ 次元可微分多様体で，準自由 S^1

作用をもち，∂X 上の S^1 作用は free で，

$$\partial X/S^1 = P_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \# \partial K$$

が成り立つ．この X に対して，補題3-1 を適用することによって，(c) の例を構成できる．（注3-3 参照）．（終）

$\boxed{\text{注 3-3}}$ G を有限表示可能な群で，

$$H_1(G;\mathbb{Z}) = H_2(G;\mathbb{Z}) = 0$$

を満たすものとする．任意の $m \geqq 7$ に対して，コンパクト可縮な m 次元可微分多様体 K で，$\pi_1(\partial K) = G$ を満たすものが存在する．さらに，この様な G は無数に存在することが知られている．（cf. 田村一郎：多様体の多様性，「数学」21-4 (1969), 275-285）